

Obrazac Metodičkih preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda predmetnih kurikuluma i međupredmetnih tema za osnovnu i srednju školu	
OSNOVNI PODATCI	
Ime i prezime	Zrinka Tomašković
Zvanje	prof. matematike
Naziv škole u kojoj ste trenutno zaposleni	Gimnazija Karlovac
Adresa elektroničke pošte	zrinka.tomaskovic@skole.hr
Naslov Metodičkih preporuka	<b>Euklid-crtice iz povijesti</b>
Predmet (ili međupredmetna tema)	matematika
Za međupredmetnu temu navesti u okviru kojeg nastavnoga predmeta, sata razrednika ili izvannastavne aktivnosti se izvodi.	
Razred	1. gimnazije (140 sati)
OBVEZNI ELEMENTI	
Odgojno-obrazovni ishod (oznaka i tekst iz kurikuluma predmeta ili međupredmetnih tema objavljenih u NN )	MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2. Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta. MAT SŠ A.1. Računa s realnim brojevima.
Tijek nastavnog sata	Uvodni dio (5 min)  Središnji dio sata: rješavanje nastavnog listića(35min)  Izlazna kartica, domaća zadaća, projektni zadatak(5min)
Opis svih aktivnosti (što rade učenici, a što učitelj/nastavnik)	<b>Uvodni dio</b>  Učenici sjede za računalima, ako je ikako moguće samostalno. Nastavnik dijeli nastavni listić pomoću kojeg će učenici otkrivati crtice o Euklidu vođenim istraživanjem.  Nije nužno rješavati zadatke redom.  <b>Središnji dio sata: rješavanje nastavnog listića</b>



	<p>Nastavnik vodi brigu da učenici rješavaju zadatke koji se od njih traže, učenici sami odlučuju o izvorima znanja, nastavnik ima savjetodavnu ulogu.</p> <p><b>Završni dio sata</b></p> <p>Posljednjih 5 minuta sata, nakon dovršenog listića, učenici popunjavaju izlaznu karticu s pet točno/netočno pitanja ili rješavaju zadatke koji dodatno potiču na razmišljenje i daljnje istraživanje. Nastavnik zadaje domaću zadaću s ciljem da se nastavi proučavanje Euklidovog poučka o pravokutnom trokutu.</p>															
<p><b>Sadržaji koji se koriste u aktivnostima</b></p>	<p>Nastavni listić – Euklid</p> <p><b>1. Euklidov teorem o prostim brojevima</b></p> <p>Ima beskonačno mnogo prostih brojeva.</p> <p><b>Zadatak:</b> Pronađite dokaz te tvrdnje! Prisjetite se kakvi su to prosti brojevi!</p> <p><b>2. Euklid-Eulerov teorem o savršenim brojevima</b></p> <p>Parni prirodni broj je savršen ako i samo ako je oblika <math>2^{p-1} \cdot M_p</math>. Pritom je <math>p</math> prost broj, a <math>M_p = 2^p - 1</math> Mersenneov prost broj dobiven iz prostog broja <math>p</math>.</p> <p><b>Zadatak 1.</b> Koje svojstvo ima broj koji je savršen broj?</p> <p><b>Zadatak 2.</b> Popuni tablicu do kraja:</p> <table border="1" data-bbox="635 1256 1214 1682"> <thead> <tr> <th>prost broj <math>p</math></th> <th>Mersenneov prost broj <math>M_p</math></th> <th>savršen broj <math>2^{p-1} \cdot M_p</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>11</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Pazi! Iz prostog broja <math>p</math> ne mora uvijek nastati prosti Mersenneov broj, a ako on nije prost, broj koji nastane u 3. stupcu nije savršen ! Provjerite računalom ili na papiru ☺!</p> <p><b>Zadatak 3.</b> Što je u teoremu Euklidovo, a što Eulerovo?</p> <p><b>3. Euklidova formula</b></p> <p>Za <math>m, n</math> prirodne brojeve, <math>m &gt; n</math></p>	prost broj $p$	Mersenneov prost broj $M_p$	savršen broj $2^{p-1} \cdot M_p$	2			3			7			11		
prost broj $p$	Mersenneov prost broj $M_p$	savršen broj $2^{p-1} \cdot M_p$														
2																
3																
7																
11																



$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

$a, b, c$  ovako dobiveni čine Pitagorinu trojku brojeva.

**Zadatak:** Kakve su Pitagorine trojke brojeva? Pronađite trojku brojeva koju čine najmanji mogući brojevi dobiveni gornjom formulom.

#### 4. Euklidska udaljenost:

Duljina dužine koja spaja neke dvije točke naziva se (euklidska) udaljenost.

$$\text{Na pravcu: } x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$$

**Zadatak:** Neka su zadane dvije točke ravnine  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$ . Pronađi formulu koja daje udaljenost između točaka  $A$  i  $B$ . Koji poučak se koristi pri određivanju te formule?

#### 5. Euklidov algoritam

Algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju brojeva.

**Primjer 1.:** Odredi najveći zajednički djelitelj brojeva 7000 i 2005.

$$7000 = 3 \cdot 2005 + 985$$

$$2005 = 2 \cdot 985 + 35$$

$$985 = 28 \cdot 35 + \boxed{5}$$

$$35 = 7 \cdot 5$$

$$D(7000, 2005) = 5$$

**Primjer 2. :** Zapiši dobiveni NZD kao linearnu kombinaciju njegovih višekratnika iz prethodnog zadatka!

$$985 = 28 \cdot 35 + \boxed{5} \Rightarrow 5 = 985 - 28 \cdot 35$$

$$2005 = 2 \cdot 985 + 35 \Rightarrow 35 = 2005 - 2 \cdot 985$$

$$7000 = 3 \cdot 2005 + 985 \Rightarrow 985 = 7000 - 3 \cdot 2005$$

$$\begin{aligned} 5 &= 985 - 28 \cdot 35 = 985 - 28(2005 - 2 \cdot 985) \\ &= 57 \cdot 985 - 28 \cdot 2005 \\ &= 57(7000 - 3 \cdot 2005) - 28 \cdot 2005 \\ &= 57 \cdot 7000 - 199 \cdot 2005 \end{aligned}$$

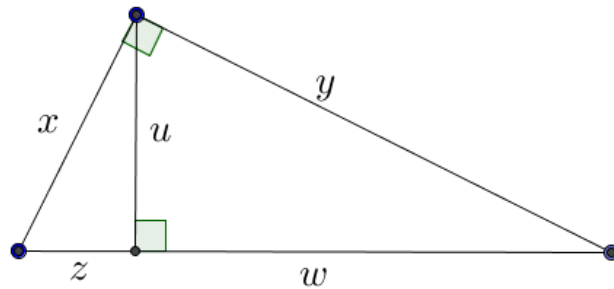
$$5 = 57 \cdot 7000 - 199 \cdot 2005$$



	<p><b>Zadatak:</b> Odredi <math>D(2019, 3365)</math> i zapiši ga kao linearnu kombinaciju brojeva 2019 i 3365!</p> <p><b>6. Euklidov poučak:</b></p> <p>U svakom je pravokutnom trokutu duljina svake katete geometrijska sredina duljine hipotenuze i duljine odsječka na hipotenuzi uz tu katetu što ga određuje visina na hipotenuzu; U svakom je pravokutnom trokutu duljina visina na hipotenuzu geometrijska sredina duljina odsječaka koje ta visina određuje na hipotenuzi.</p> <p><b>Zadatak:</b> Napravite skicu koja odgovara poučku! Izvedite dokaz poučka! Pronađite uobičajene oznake za odsječke koje na hipotenuzi određuje visina!</p> <p><b>7. Euklid</b></p> <p><b>Zadatak:</b> Smjestite Euklida u prostor i vrijeme! Pronađite njegovo najvažnije djelo!</p>
<p><b>Primjeri vrednovanja za učenje, vrednovanja kao učenje ili naučenog uz upute</b></p>	<p><b>Izlazna kartica – vrednovanje kao učenje</b></p> <p>Ime i prezime: _____ razred: _____ datum: _____ bodovi: ___/5</p> <p><b>Zaokruži T ili N!</b></p> <p>1. Euklidov algoritam koristi se za određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika.    <b>T   N</b></p> <p>2. <math>D(45,27) = 9</math> <span style="float: right;"><b>T   N</b></span></p> <p>3. Euklidov poučak je tvrdnja koja se odnosi na svaki trokut! <span style="float: right;"><b>T   N</b></span></p> <p>4. Prosti brojevi su brojevi djeljivi samo sa 1 i sa samim sobom. <span style="float: right;"><b>T   N</b></span></p>



5. Pogledajte skicu i navedenu tvrdnju:  $u = \sqrt{z \cdot w}$   
T N



**Izlazna kartica na drugi način – vrednovanje kao učenje**

1. Odredi  $D(375, 417)$ .

2. Koji je najveći Mersenneov prost broj koji možete izračunati pomoću džepnog računala?

3. Odredi djelitelje broja 28. Zbroji prave djelitelje (svi djelitelji osim broja samog). Zbroji i njihove recipročne brojeve.

Isto napravi i za 6 i za 496.

4. Svaki parni savršeni broj u binarnom obliku ima zanimljiv zapis. Odredi binarni zapis prva tri savršena broja.

**Razrađeni problemski zadaci, zadaci za poticanje kritičkog razmišljanja, kreativnosti i/ili istraživački zadaci; ovisno o predmetu i nastavnoj temi**

**Projektni zadatak:**

Parni brojevi u imeniku:

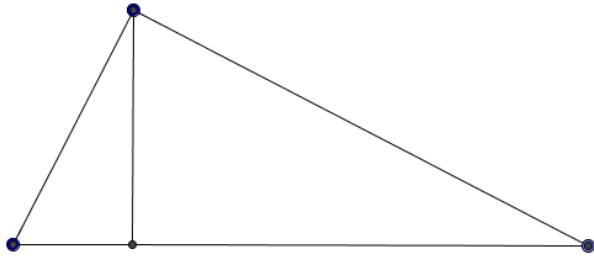
Po uzoru na Euklida, istražite Pitagoru!

Neparni brojevi u imeniku:

Po uzoru na Euklida, istražite Talesa!

**Domaća zadaća:**

Osmisli i riješi 5 zadataka povezanih s nacrtanim

	<p>trokutom:</p> 
<b>DODATNI ELEMENTI<sup>1</sup></b>	
<p>Poveznice na više odgojno-obrazovnih ishoda različitih predmeta ili očekivanja međupredmetnih tema</p>	<p>ikt C.4.2. Učenik samostalno provodi složeno pretraživanje informacija u digitalnome okružju. POV SŠ C.1.1. Učenik <i>analizira</i> važnost širenja izuma i tehnologije u prapovijesti i starome vijeku.</p>
<p>Aktivnost u kojima je vidljiva interdisciplinarnost</p>	<p>Povijest – čitav sat je koncipiran na analiziranju i primjeni spoznaje koju baštinimo iz antike</p>
<p>Aktivnosti koji obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama</p>	
<p>Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima</p>	
<p>Upute za kriterijsko vrednovanje kompleksnih i problemskih zadataka i/ili radova esejskoga tipa</p>	
<p>Projektne zadaci (s jasnim scenarijima, opisima aktivnosti, rezultatima projekta, vremenskim okvirima)</p>	
<p>Poveznice na multimedijske i interaktivne sadržaje</p>	<p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=5jLWXwSXJdg">https://www.youtube.com/watch?v=5jLWXwSXJdg</a> (22.5.2019.)(Euklidov algoritam)</p> <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=ctC33JAV4FI">https://www.youtube.com/watch?v=ctC33JAV4FI</a> (22.5.2019.)(o prostim brojevima i Euklidu)</p>
<p>Prijedlozi vanjskih izvora i literature</p>	<p><a href="https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician">https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician</a> (22.5.2019.)</p> <p><a href="https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple">https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple</a> (22.5.2019.)</p>

<sup>1</sup> Sastavni elementi prijave koji omogućuju dodanu vrijednost provedbi javnog poziva. Nisu obavezni, ali nose dodatne bodove u skladu s kriterijima procjene Metodčkih preporuka.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%E2%80%93Euler\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%E2%80%93Euler_theorem)  
(29.6.2019.)

Pavković, Boris; Veljan, Darko. 1995. *Elementarna matematika II*. Školska knjiga. Zagreb.