

Obrazac Metodičkih preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda predmetnih kurikuluma i međupredmetnih tema za osnovnu i srednju školu	
OSNOVNI PODATCI	
Ime i prezime	Ružica Soldo
Zvanje	prof. matematike
Naziv škole u kojoj ste trenutano zaposleni	Strojarska tehnička škola Fausta Vrančića
Adresa elektroničke pošte	ruzica.soldo@skole.hr
Naslov Metodičkih preporuka	Kvadrat binoma i razlika kvadrata
Predmet (ili međupredmetna tema)	Matematika
Za međupredmetnu temu navesti u okviru kojeg nastavnoga predmeta, sata razrednika ili izvannastavne aktivnosti se izvodi.	
Razred	1. (prvi) 140 sati
OBVEZNI ELEMENTI	
Odgojno-obrazovni ishod (oznaka i tekst iz kurikuluma predmeta ili međupredmetnih tema objavljenih u NN)	<p>MAT SŠ B.1.2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima.</p> <p>Razrada ishoda: Primjenjuje formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata</p> <p>Sadržaj: Formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata</p> <p>Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoga ishoda:</p>



**Tijek nastavnog
sata**

Uvodni dio sata:

-Ponoviti formule za površinu kvadrata i pravokutnika.

Glavni dio sata:

Rasporediti učenike u grupe .

Svaka grupa dobije listić s dokazom kojeg treba shvatiti i zadatkom primjene.

Vođa svake grupe prezentira razradu cijelom razredu, dokazuje formulu, a sudionici grupe rješavaju ostale zadatke.

1. Grupa (listić br 1)

Proučite i pokušajte razumjeti dokaz uz diskusiju i međusobnu raspravu , a zatim riješite ostale zadatke.

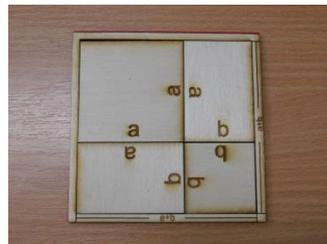
Kvadrat zbroja

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Upute za uporabu modela **Kvadrat zbroja**

- Dokaz bez riječi

Etape slaganja modela



U kvadratni okvir stranice a+b slažemo dva pravokutnika stranice a i b, te dva kvadrata, jedan stranice a, drugi stranice b.

-Matematički dokaz

Površina kvadrata stranice a+b jednaka je zbroju površina kvadrata stranice a, kvadrata stranice b i pravokutnika stranice a i b.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Zadatak 1:

Izračunaj : $(4 + 3x)^2$

Zadatak 2:

Čemu je jednak izraz $25x^2 + 10x + 1$

Zadatak 3:

Kvadrat zbroja dva susjedna neparna prirodna broja je 64.

O kojim je brojevima riječ?

2. Grupa (listić br 2)

Proučite i pokušajte razumjeti dokaz uz diskusiju i međusobnu raspravu , a zatim riješite ostale zadatke.

Upute za uporabu modela **Kvadrat razlike**

- Dokaz bez riječi

Etape slaganja modela



U kvadratni okvir stranice a upišemo kvadrat stranice b ,kvadrat stranice a-b te dva pravokutnika stranice b i a-b.

-Matematički dokaz

Površinu kvadrata stranice a-b dobijemo tako da od kvadrata stranice a oduzmemo kvadrat stranice b te dvije površine pravokutnika stranice a-b i b.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Zadatak 1:

Izračunaj : $(4 - 5x)^2$

Zadatak 2:

Čemu je jednak izraz $36x^2 - 24x + 4$

Zadatak 3:

Kvadrat razlike dva susjedna parna prirodna broja je 36.

O kojim je brojevima riječ?

3. Grupa (listić br 3)

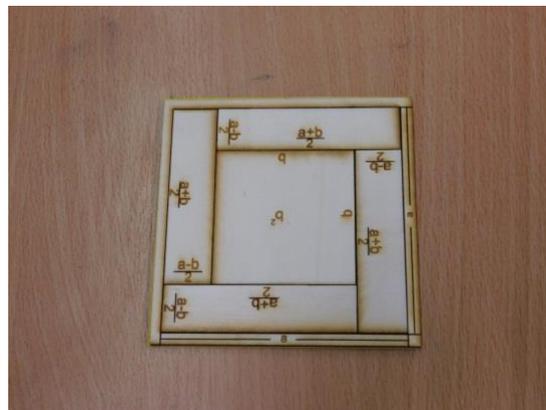
Proučite i pokušajte razumjeti dokaz uz diskusiju i međusobnu raspravu , a zatim riješite ostale zadatke.

Razlika kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

1.način

- Dokaz bez riječi

Etape slaganja modela



U kvadratni okvir stranice a upišemo kvadrat stranice b i primjetimo da preostali prostor čine 4 pravokutnika stranica $\frac{a+b}{2}$ i $\frac{a-b}{2}$.

Preslagivanjem tih pravokutnika dobijemo veći pravokutnik jedne stranice duljine $\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = a + b$ i druge stranice duljine $\frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a - b$

Površina dobivenog pravokutnika iznosi $(a - b)(a + b)$.



-Matematički dokaz

Ako od kvadrata površine a^2 oduzemo kvadrat površine b^2 dobit ćemo pravokutnik površine $(a - b)(a + b)$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Zadatak 1: Izračunaj $(3x - 5)(3x + 5)$

Zadatak 2: Faktoriziraj $49x^2 - 81^2$

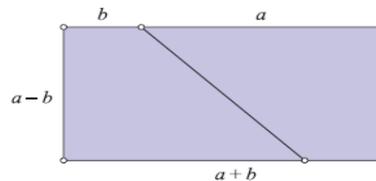
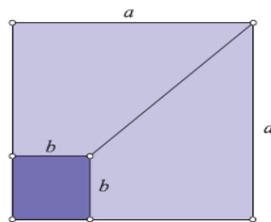
Zadatak 3: Razlika kvadrata dva susjedna broja je 35. Jedan broj je paran, a drugi manji neparan. Koji su to brojevi?

4. Grupa (listić br 4)

Proučite i pokušajte razumjeti dokaz uz diskusiju i međusobnu raspravu, a zatim riješite ostale zadatke.

Razlika kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

2.način



Zadatak 1:

Izračunaj $(4x - 9) \cdot (4x + 9)$

Zadatak 2:

Faktoriziraj $36x^2 - y^2$

Zadatak 3:

Izračunaj bez upotrebe kalkulatora primjenjujući formulu razlike kvadrata

$502 \cdot 498$

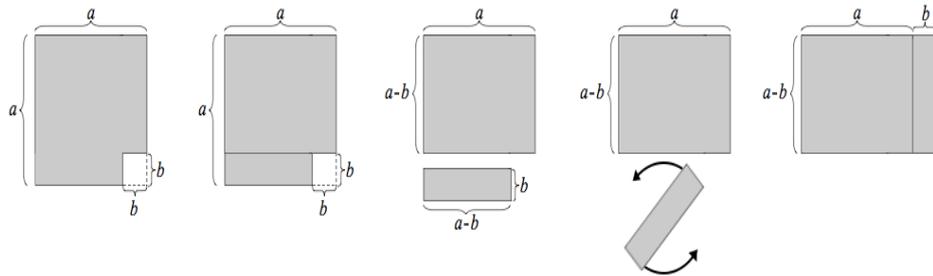


5. Grupa (listić br 5)

Proučite i pokušajte razumjeti dokaz uz diskusiju i međusobnu raspravu, a zatim riješite ostale zadatke.

Razlika kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3.način



Zadatak 1:

Izračunaj $(7x - 5) \cdot (7x + 5)$

Zadatak 2:

Faktoriziraj $81x^2 - 16y^2$

Zadatak 3:

Izračunaj bez upotrebe kalkulatora primjenjujući formulu razlike kvadrata

$$1122^2 - 1121^2$$

Uoči: $n^2 - (n - 1)^2 = (n - n + 1) \cdot (n + n - 1) = 2n - 1$

-Nakon prezentacije grupnog rada svih grupa učenici rade kratki kahoot kviz.

<https://create.kahoot.it/details/kvadrat-binoma-i-razlika-kvadrata/a7175d52-1d52-4fee-ab4a-274130eb5b6b>

Završni dio sata:

-Lista za procjenu

-Domaća zadaća:

Zadatak:

Koristeći lako dostupne besplatne programe učenici će izraditi prikladne plakate koristeći fotografije aktivnosti koje će dobiti na mail od nastavnika. (na



	<p>satu računalstva učenici su upoznati s odgovarajućim programima)</p> <p>https://www.befunky.com/create/designer</p> <p>https://spark.adobe.com</p> <p>https://www.canva.com</p>
<p>Opis svih aktivnosti (što rade učenici, a što učitelj/nastavnik)</p>	<p>Aktivnost 1: Nastavnik traži od učenika da ponove formule za površinu kvadrata i pravokutnika. Učenici zapisuju formule na ploči .</p> <p>Aktivnost 2 :</p> <p>Nastavnik dijeli učenike u grupe.</p> <p>Svaka grupa dobije listić s raspisanim dokazom kojeg treba shvatiti i 2Dmodel uz dokaz. Učenicima se pruža fizičko iskustvo preslagivanja i otkrivanja veza između: aritmetike sa slovima i površina. Na taj način izvode matematičke dokaze koristeći vizualizaciju. Naglasak se stavlja na grupni rad, problemsku nastavu i kreativnost u nastavi matematike.</p> <p>Vođa svake grupe prezentira rezultate cijelom razredu. Dokazuje formulu, a ostali sudionici grupe rješavaju zadatke koje su dobili na listiću.</p> <p>Na kraju sata svaki učenik ima zapisane prezentacije svih grupa i riješene zadatke u bilježnici.</p> <p>Aktivnost 3 :</p> <p>Grupe čine 5 do 6 učenika. Svaka grupa bira vođu koji će prezentirati rad svoje grupe ostalim učenicima nakon provedenog istraživanja, dokazivanja i rješavanja problema.</p> <p>Nastavnik koordinira rad svih grupa , pomaže u otkrivanju veza 2D modela i raspisanog dokaza i fotografira tijekom aktivnosti.</p>



	<p>Aktivnost 4 :</p> <p>Vođa svake grupe prezentira rješenja na ploči dokazujući i objašnjavajući formule te bira jednog učenika dane grupe da riješi ostale zadatke.</p> <p>Aktivnost 5.</p> <p>Učenici nakon prezentiranih rješenja ispune listu za procjenu.</p> <p>Aktivnost 6.</p> <p>Kahoot kviz</p> <p>Nakon prezentacije grupa učenici rade kratki kahoot kviz</p> <p>https://create.kahoot.it/details/kvadrat-binoma-i-razlika-kvadrata/a7175d52-1d52-4fee-ab4a-274130eb5b6b</p> <p>Aktivnost 7.</p> <p>Nastavnik daje domaću zadaću</p>
<p>Sadržaji koji se koriste u aktivnostima</p>	<p>-Modeli 2D binoma koje su učenici napravili koristeći moderne tehnologije laser, 3d printer te znanja iz strukovnih predmeta i računalstva.</p> <p>-Udžbenik : Z. Šikić, R.Kalazić, S. Lukač, B. Palanović MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, Profil , 2014., Zagreb</p> <p>-Plakat: u privitku</p>



<p>Primjeri vrednovanja za učenje, vrednovanja kao učenje ili naučenog uz upute</p>	<p>Lista za procjenu</p> <table border="1" data-bbox="443 315 1158 1464"> <thead> <tr> <th data-bbox="443 315 668 741"> <i>Procijeni koliko dobro razumiješ i primjenjuješ formule kvadrat binoma i razliku kvadrata</i> <i>(Stavi X u stupcu koji odgovara tvojoj procjeni)</i> </th> <th data-bbox="668 315 812 741"> Uvijek, dobro </th> <th data-bbox="812 315 1007 741"> Ponekad uglavnom dobro </th> <th data-bbox="1007 315 1158 741"> Ne baš, trebam pomoć </th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="443 741 668 907">Mogu ispravno napisati formulu za kvadrat binoma</td> <td data-bbox="668 741 812 907"></td> <td data-bbox="812 741 1007 907"></td> <td data-bbox="1007 741 1158 907"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="443 907 668 1104">Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za kvadrat binoma</td> <td data-bbox="668 907 812 1104"></td> <td data-bbox="812 907 1007 1104"></td> <td data-bbox="1007 907 1158 1104"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="443 1104 668 1265">Mogu ispravno napisati formulu za razliku kvadrata</td> <td data-bbox="668 1104 812 1265"></td> <td data-bbox="812 1104 1007 1265"></td> <td data-bbox="1007 1104 1158 1265"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="443 1265 668 1464">Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za razliku kvadrata</td> <td data-bbox="668 1265 812 1464"></td> <td data-bbox="812 1265 1007 1464"></td> <td data-bbox="1007 1265 1158 1464"></td> </tr> </tbody> </table> <p data-bbox="1177 454 1412 813"> Kahoot kviz https://create.kahoot.it/details/kvadrat-binoma-i-razlika-kvadrata/a7175d52-1d52-4fee-ab4a-274130eb5b6b </p>	<i>Procijeni koliko dobro razumiješ i primjenjuješ formule kvadrat binoma i razliku kvadrata</i> <i>(Stavi X u stupcu koji odgovara tvojoj procjeni)</i>	Uvijek, dobro	Ponekad uglavnom dobro	Ne baš, trebam pomoć	Mogu ispravno napisati formulu za kvadrat binoma				Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za kvadrat binoma				Mogu ispravno napisati formulu za razliku kvadrata				Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za razliku kvadrata			
<i>Procijeni koliko dobro razumiješ i primjenjuješ formule kvadrat binoma i razliku kvadrata</i> <i>(Stavi X u stupcu koji odgovara tvojoj procjeni)</i>	Uvijek, dobro	Ponekad uglavnom dobro	Ne baš, trebam pomoć																		
Mogu ispravno napisati formulu za kvadrat binoma																					
Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za kvadrat binoma																					
Mogu ispravno napisati formulu za razliku kvadrata																					
Mogu faktorizirati izraz primjenjujući formule za razliku kvadrata																					
<p>Razrađeni problemski zadaci, zadaci za poticanje kritičkog razmišljanja, kreativnosti i/ili istraživački zadaci; ovisno o predmetu i nastavnoj temi</p>	<p>Zadatak 3. (listić -1.grupa)</p> <p>Razlika kvadrata dva susjedna prirodna broja je 35 .Jedan broj je paran, a drugi manji neparan . Koji su to brojevi?</p> <p>Rješenje: Zapis dva susjedna parna broja $2n-1, 2n$</p> $(2n)^2 - (2n - 1)^2 = 35$ $4n^2 - (4n^2 - 4n + 1) = 35$ $4n^2 - 4n^2 + 4n - 1 = 35$ $4n - 1 = 35$																				



$$4n = 36$$

$$n = 9$$

Traženi brojevi su 17 i 18.

$$\text{Provjera : } 18^2 - 17^2 = 35$$

Zadatak 3: (listić -2.grupa)

Kvadrat zbroja dva susjedna neparna prirodna broja je 64 o kojim je brojevima riječ?

$$(2n - 1 + 2n + 1)^2 = 64$$

$$(4n)^2 = 64$$

$$16n^2 = 64$$

$$n^2 = 4$$

$$n = \pm 2$$

Imamo dvije mogućnosti:

- 1) $n=2$
- 2) $n=-2$ -nije rješenje jer tražimo prirodan broj

Zaključak:

Traženi prirodni brojevi su 3 i 5.

Zadatak 3: (listić -3.grupa)

Kvadrat razlike dva broja je 36. Ako je jedan broj 4 puta veći od drugog o kojim brojevima je riječ?

O kojim je brojevima riječ?

$$(a - b)^2 = 36$$

$$a = 4b \quad (1)$$

Uvrštavanjem u prvu jednačbu dobijemo izraz

$$(4b - b)^2 = 36$$

$$(3b)^2 = 36$$

1. mogućnost $3b = 6$

$$b = 2$$

$$\text{Iz (1) slijedi } a = 4b = 4 \cdot 2 = 8$$



Odgovor : Traženi brojevi su 8 i 2

$$2. \text{ mogućnost } 3b = -6$$

$$b = -2$$

$$\text{Iz (1) slijedi } a = 4b = 4 \cdot (-2) = -8$$

Zadatak 3: (listić -4.grupa)

Izračunaj bez upotrebe kalkulatora primjenjujući formulu razlike kvadrata

$$502 \cdot 498 = (500 + 2) \cdot (500 - 2) = 500^2 - 2^2 = 250000 - 4 = 249996$$

Zadatak 3: (listić -5.grupa)

Zadatak 3:

Izračunaj bez upotrebe kalkulatora primjenjujući formulu razlike kvadrata

$$1122^2 - 1121^2$$

$$\text{Uoči: } n^2 - (n - 1)^2 = (n - n + 1) \cdot (n + n - 1) = 2n - 1 \quad (1)$$

1.način

$$1122^2 - 1121^2 = (1122 - 1121) \cdot (1122 + 1121) = 1 \cdot 2243 = 2243$$

2.način koristeći (1)

$$1122^2 - 1121^2 = 2 \cdot 1122 - 1 = 2243$$

-Problemski zadatak (za one koji žele znati više)



Želimo križati crvenu  i bijelu  ružu .

Pod pretpostavkom da se zadani uvjeti nalazi u stanju Hardy - Weinbergove ravnoteže, napravi raspodjelu genotipa*, ako vjerojatnost iz modela razdiobe aleli* crvene ruže 0.8. Izračunajte koliko će cvjetova imati recesivni aleli ,tj



koliko je bijelih  ruža , te koliko je heterozigota (rozih  ruža) ?

Napomena:

-aleli* su različite varijante jednog gena (p dominantni, q recesivni)

-genotip* je skup svih gena koji određuju određeno svojstvo

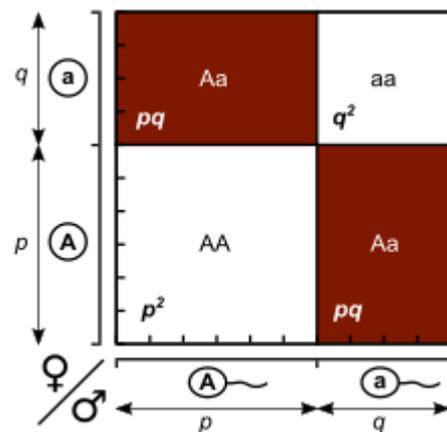
- stanje Hardy - Weinbergove ravnoteže

$$p + q = 1 \quad /^2$$

$$(p + q)^2 = 1$$

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

-Prikaz pomoću Punettovog kvadrata :



Punnettov kvadrat se često koristi u genetici prilikom određivanja udjela određenih genotipa iz poznatih udjela alela u populaciji kao vizualni dokaz formule kvadrata binoma.

-Rješenje problemskog zadatka

$$p = 0.8 = 80\%$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2 = 20\%$$



ruža

$$pq = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16 = 16\%$$



$$2pq = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.32 = 32\%$$

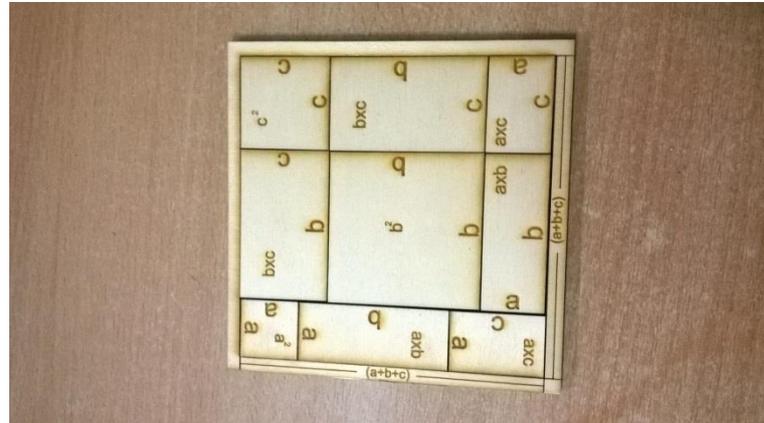
ruža.

Raspodjela pomoću Punettovog kvadrata

		Sperm	
		C^R (80%)	C^W (20%)
Eggs	C^R (80%)	p^2  64% $C^R C^R$	pq  16% $C^R C^W$
	C^W (20%)	qp  16% $C^R C^W$	 4% $C^W C^W$

-Prošireni sadržaj :

Kvadrat trinoma



Upute za uporabu modela **Kvadrat trinoma**

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- Dokaz bez riječi

Etape slaganja modela

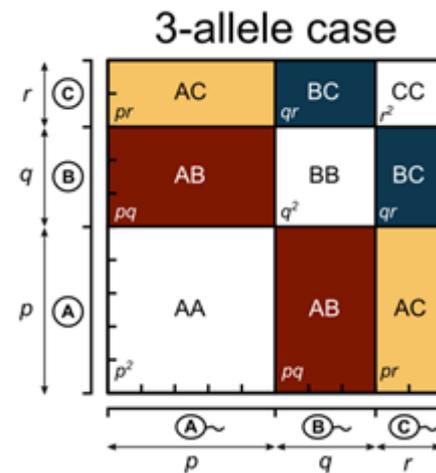
U kvadratni okvir duljine stranice $a + b + c$ slažemo tri kvadrata površina a^2 , b^2 i c^2 te šest pravokutnika i to 2 pravokutnika površine ab , 2 površine ac i 2 pravokutnika površine bc .

Matematički dokaz

Površina kvadrata $a + b + c$ jednaka je zbroju površina kvadrata stranica a , b i c i dvostrukom zbroju površina pravokutnika ab , ac i bc .

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

-Prikaz pomoću Punettovog kvadrata :



DODATNI ELEMENTI¹

Poveznice na više odgojno-obrazovnih ishoda različitih predmeta ili očekivanja međupredmetnih tema

- učenik prilikom izrade modela ispituje i opisuje svojstva drva, plastike i drugih materijala

- potiče se razvoja osobnoga i jedinstvenoga razmišljanja i uporabe tehnike i tehnologije sa svrhom kreativnoga inoviranja tehničke tvorevine

- učenik uz podršku učitelja vrlo jednostavnim radnjama izrađuje jednostavne digitalne sadržaje prilikom izrade plakata

-Međupredmatna tema učiti kako učiti

uku A.4/5.1.

Upravljanje informacijama

Učenik samostalno traži nove informacije iz različitih izvora, transformira ih u novo znanje i uspješno primjenjuje pri rješavanju problema.

-Međupredmatna tema osobni i socijalni razvoj

osr A.1.4.

Razvija radne navike.

¹ Sastavni elementi prijave koji omogućuju dodanu vrijednost provedbi javnog poziva. Nisu obavezni, ali nose dodatne bodove u skladu s kriterijima procjene Metodčkih preporuka.

<p>Aktivnost u kojima je vidljiva interdisciplinarnost</p>	<p>Izrada plakata- računalstvo Izrada modela- strojarske tehnologije,tehničko crtanje</p>
<p>Aktivnosti koji obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama</p>	<p>- Učenici s teškoćama ravnalom mjere dijelove modela i računajući površine uz vodstvo i pomoć profesora i vođe grupe dokazuju istinitost formula. Učenicima se pruža fizičko iskustvo preslagivanja i otkrivanja veza između aritmetike sa slovima i površina. -Napravljeni su i posebni modeli prilagođeni za slijepce i slabovidne Brailleovim pismom i jarkim bojama.</p>
<p>Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima</p>	<p>Zadatak : ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 1. razred – srednja škola – A varijanta siječnja 2016. Postoje li tri uzastopna cijela broja čiji je zbroj kvadrata djeljiv s 2016? Rješenje.: Zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja je $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 . (1 \text{ bod })$ Taj zbroj iznosi $3n^2 + 6n + 5 . (1 \text{ bod })$ Broj $3n^2 + 6n + 5$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, pa nije djeljiv s 3.(2 boda) Broj 2016 je djeljiv s 3, pa broj koji nije djeljiv s 3 nije djeljiv ni s 2016. (1 bod) Dakle, zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja ne može biti djeljiv s 2016. (1 bod) Napomena: Učenici mogu zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja zapisati na razne (više ili manje elegantne) načine.</p>
<p>Upute za kriterijsko vrednovanje kompleksnih i problemskih zadataka i/ili radova esejskoga</p>	



tipa	
Projektne zadaci (s jasnim scenarijima, opisima aktivnosti, rezultatima projekta, vremenskim okvirima)	
Poveznice na multimedijске i interaktivne sadržaje	https://create.kahoot.it/details/kvadrat-binoma-i-razlika-kvadrata/a7175d52-1d52-4fee-ab4a-274130eb5b6b
Prijedlozi vanjskih izvora i literature	<p>[1] B. Dakić, N. Elezović, MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, Element d.o.o., 2014., Zagreb</p> <p>[2] Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač, B. Palanović MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, Profil, 2014., Zagreb</p> <p>[3] http://www.mathdoubts.com/a-plus-b-whole-square-geometric-proof</p> <p>[5] http://www.mathsisfun.com/algebra/special-binomial-products.html</p> <p>[6] http://www.mathematische-basteleien.de/formula.htm</p> <p>[6] https://natjecanja.math.hr</p> <p>[7] http://ib.berkeley.edu/courses/bio1b/evolutionspring11/pdfs/MoritzNotes3.pdf</p> <p>[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Difference_of_two_squares</p>



Plakat:

KVADRAT BINOMA

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

