



Obrazac „Metodičkih preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda predmetnih kurikuluma i međupredmetnih tema za osnovnu i srednju školu“

OSNOVNI PODACI

Ime i prezime	Sanja Sruk
Zvanje	Profesor mentor matematike
Naziv škole u kojoj ste trenutačno zaposleni	1. gimnazija, Zagreb
Adresa elektroničke pošte	sanja.sruk1@gmail.com sanja.sruk@skole.hr
Naslov metodičkih preporuka	LINEARNE FUNKCIJE U EKONOMIJI
Predmet (ili međupredmetna tema)	Matematika
Za međupredmetnu temu obavezno navesti u sklopu kojega nastavnoga predmeta se izvodi. Dodatno može i sat razrednika ili izvannastavna aktivnost, ali najmanje jedan nastavni predmet je obavezan.	-
Razred	1. razred SŠ (105, 140, 175, 210 sati)

OBVEZNI ELEMENTI

Odgono-obrazovni ishod (oznaka i tekst iz kurikuluma predmeta ili međupredmetnih tema objavljenih u NN)	MAT SŠ B.1.5. MAT SŠ D.1.1. Povezuje različite prikaze linearne funkcije. MAT SŠ B.1.6. Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema.
Tijek nastavnoga sata	Nakon obrade cjeline Linearna funkcija i rješavanja raznih zadataka u kojima je prisutno modeliranje, cijeli ovaj sat je posvećen modeliranju linearne funkcije s primjenom u ekonomiji uz uporabu računala za crtanje grafova i interpretaciju rješenja (WolframAlpha , https://www.wolframalpha.com/ https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/plotting-and-graphics/).



	<p>U ekonomiji se pojavljuju neke specifične funkcije (funkcija troškova, funkcija prihoda, funkcija dobiti, funkcija ponude, funkcija potražnje...) koje su ponekad u obliku linearne funkcije, a rješavanje takvih zadataka pokazuje učeniku koliki je značaj i primjena matematike u ekonomiji i poduzetništvu, tj. situacijama iz svakodnevnog života.</p> <p>Uvodni dio sata: Nastavnik dijeli učenike u parove. Svaki par koristi jedno računalno/tablet. Ukoliko učenici nisu ranije crtali grafove pomoću WolframAlpha, nastavnik im daje upute i pokazuje na primjeru. Umjesto WolframAlpha može se koristiti neki drugi program za crtanje grafova.</p> <p>Glavni dio sata: Svaki par dobije listić sa 7 zadataka + 2 dodatna bonus zadatka. Učenici rješavaju zadatke u paru, a nastavnik ide od para do para, pomaže, savjetuje, kontrolira...</p> <p>Kraj sata: Kao konačno ponavljanje i provjeravanje usvojenosti osnovnih pojmoveva o linearnoj funkciji učenici igraju igru memorije https://matchthememory.com/sanjasruk-linearna.</p>
Opis svih aktivnosti (što rade učenici, a što učitelj/nastavnik)	<p>Nakon što su učenici podijeljeni u parove dobivaju (prema potrebi) od nastavnika upute kako crtati grafove pomoću WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/) https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/plotting-and-graphics/ ili nekog drugog programa. U parovima bi trebali biti jedan bolji i jedan slabiji učenik kako bi zajednički uspješno riješili sve zadatke. Zatim nastavnik svakom paru daje listić sa zadatcima (nakon tablice je prilog Listić sa zadatcima) i učenici počinju rješavati zadatke u bilježnicu, a dijelove zadataka u kojima se traži nacrtati graf rješavaju na računalu. Nastavnik ide od para do para, ako je potrebno pomaže, savjetuje, provjerava rješenja (nakon tablice je prilog Rješenja zadataka), odgovara na pitanja, postavlja pitanja kojima potiče kritičko razmišljanje... Bonus zadatci su za darovite (jer zahtijevaju više povezivanja i kritičkog razmišljanja) i one koji će prethodnih sedam zadataka riješiti prije drugih.</p> <p>Zadnjih pet minuta sata učenici igraju online igru memorije kao malu relaksaciju i konačno ponavljanje i provjeravanje usvojenosti osnovnih pojmoveva o linearnoj funkciji. Parovi koje trebaju povezati su: linearna funkcija i $f(x)=ax+b$, koeficijent smjera i a, odsječak na y-osi i b, nul-točka i $-\frac{b}{a}$, rastuća linearna funkcija i $a>0$, padajuća linearna funkcija i $a<0$, graf linearne funkcije i pravac, domena linearne funkcije i R. Igra je na: https://matchthememory.com/sanjasruk-linearna.</p>



	<p>U igri se mjeri vrijeme pa se igra može pretvoriti u malo natjecanje parova i par koji najbrže rješi dobije malu nagradu (bombon, gumica, olovka...)</p>
Sadržaji koji se koriste u aktivnostima	<ul style="list-style-type: none">- rješavanje listića sa zadatcima (nakon tablice je prilog Listić sa zadatcima)- crtanje grafova pomoću WolframAlpha https://www.wolframalpha.com/- igra memorije https://matchthememory.com/sanjasruk-linearna (autorski rad)
Primjeri vrednovanja za učenje, vrednovanja kao učenje ili naučenog uz upute	Rješavanje zadataka je vrednovanje za učenje, jer nastavnik svojim komentarima svakom paru posebno ukazuje na to koji dijelovi gradiva su dobro savladani, a koje treba još uvježbati. Također i igra memorije na kraju sata kojom se provjerava usvojenost najosnovnijih pojmoveva o linearnoj funkciji. Ta igra ujedno omogućuje učenicima i samovrednovanje (vrednovanje kao učenje), jer igrajući ju sami vide koliko su im jasni osnovni pojmovi o linearnoj funkciji.
Razrađeni problemski zadaci, zadaci za poticanje kritičkog razmišljanja, kreativnosti i/ili istraživački zadaci; ovisno o predmetu i nastavnoj temi	Svi zadatci su problemski i potiču kritičko razmišljanje. Dva bonus zadataka (8. i 9.) zahtijevaju više povezivanja i kritičkog razmišljanja, a imaju i više dijelova od ostalih zadataka. Rješenja su u prilogu Rješenja zadataka .

DODATNI ELEMENTI¹	
Poveznice na više odgojno-obrazovnih ishoda različitih predmeta ili očekivanja međupredmetnih tema	<p>uku C.4/5.1. Vrijednost učenja. Učenik može objasniti vrijednost učenja za svoj život.</p> <p>uku D.4/5.2. Suradnja s drugima. Učenik ostvaruje dobru komunikaciju s drugima, uspješno surađuje u različitim situacijama i spreman je zatražiti i ponuditi pomoć.</p> <p>ikt C.4.1. Učenik samostalno provodi složeno istraživanje radi rješenja problema u digitalnome okružju.</p> <p>ikt C.4.4. Učenik samostalno i odgovorno upravlja prikupljenim informacijama.</p> <p>pod A.4.3. Upoznaje i kritički sagledava mogućnosti razvoja karijere i profesionalnoga usmjeravanja. Uočava mogućnosti i uvjete za pokretanje vlastita posla.</p>

¹ Sastavni elementi prijave koji omogućuju dodanu vrijednost provedbi javnoga poziva. Nisu obvezni, ali nose dodatne bodove u skladu s kriterijima procjene metodičkih preporuka.



Aktivnost u kojima je vidljiva interdisciplinarnost	Poduzetništvo – rješavajući zadatke učenici uviđaju važnost poslovnog planiranja prije pokretanja nekog posla, računanje troškova, dobiti...
Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama	Učenici sa slabijim vidom dobiju listić s većim fontom. Učenici koji zbog motoričkih teškoća otežano pišu rukom rade dijelove zadatka na računalu.
Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima	Bonus zadatci (8. i 9.) u Listiću sa zadatcima
Upute za kriterijsko vrednovanje kompleksnih i problemskih zadataka i/ili radova esejskoga tipa	-
Projektni zadaci (s jasnim scenarijima, opisima aktivnosti, rezultatima projekta, vremenskim okvirima)	-
Poveznice na multimedijijske i interaktivne sadržaje	https://www.wolframalpha.com/ https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/plotting-and-graphics/ https://matchthememory.com/sanjasruk-linearna
Prijedlozi vanjskih izvora i literature	-

Listić sa zadatcima:

1. Funkcija troškova proizvodnje je funkcija oblika $T(x) = ax+b$, pri čemu je $T(x)$ ukupan trošak proizvodnje, x broj proizvoda, b fiksni trošak (ne ovisi o proizvodnji, tu su npr. plaće radnika, najam prostora...) i a varijabilni trošak (ovisi o proizvodnji).

Troškovi iznajmljivanja sale za vjenčanja su 2000 fiksno i još 300 kn po osobi za večeru.

- a) Odredi funkciju troškova pa izračunaj koliko će koštati iznajmljivanje sale za 50 osoba.
- b) Koliko osoba može biti na vjenčanju ukoliko mladenci na iznajmljivanje sale planiraju potrošiti najviše 35000 kn?

2. Tri prijateljice, Anita, Božica i Cecilija, žele zajednički otvoriti malu tvornicu i pokrenuti proizvodnju kozmetičkih proizvoda. Svaka ima drugu ideju koji bi proizvod htjela proizvoditi i svaka je izračunala svoju funkciju troškova. Dogovorile su se da će proizvoditi onaj proizvod čija se proizvodnja najviše isplati za količinu veću od 20 000. Ako su funkcije troškova:
 $A(x) = 75x + 600\ 000$
 $B(x) = 50x + 1\ 000\ 000$
 $C(x) = 60x + 1\ 200\ 000$,



iz njihovog grafičkog prikaza zaključite čija ideja je najisplativija.

3. Funkcija prihoda je funkcija oblika $P(x) = ax$, gdje je a prihod (cijena) po jedinici proizvoda.
Dobit je razlika prihoda i troškova, pa za funkciju dobiti vrijedi $D(x) = P(x) - T(x)$.

Tvornica „Trnoružica“ prodaje pidžame po cijeni 150 kn. Troškovi su opisani funkcijom $T(x) = 30x+5000$.

- a) Kako glase jednadžbe funkcija prihoda i dobiti?
b) Koliko najmanje pidžama treba prodati da bi se tvornici isplatilo poslovanje?

4. Funkcija potražnje opisuje kako potražnja neke robe ovisi o cijeni. Ponekad je to linearna funkcija oblika $f(x) = ax+b$, gdje je x cijena robe, a $f(x)$ količina robe koju tržište potražuje po toj cijeni. Koeficijent a govori za koliko se smanjuje potražnja ukoliko se cijena poveća za 1, a b govori kolika je potreba tržišta za tom robom (kad bi ona bila besplatna).

Je li funkcija potražnje rastuća ili padajuća? Zašto?

U tvornici cipela „Pepeljuga“ su primijetili da se ovisnost broja prodanih cipela u jednom danu i cijene cipela može prikazati sljedećom tablicom:

KOLIČINA	CIJENA
50	400
90	200

- a) Odredi linearnu funkciju koja opisuje ovisnost potražnje cipela o cijeni.
b) Koliko pari cipela dnevno će prodati ako je cijena 500 kn?
5. U restoranu „Tri praščića“ izračunali su da se dnevna potražnja čevapa može opisati formulom $f(x) = -0.8x+150$, gdje je x cijena porcije čevapa, a $f(x)$ broj prodanih porcija.
a) Koliko porcija čevapa će prodati ako je cijena jedne porcije 30 kn?
b) Koliko porcija čevapa će prodati ako je cijena jedne porcije 40 kn?
c) Kolika bi trebala biti cijena da dnevno prodaju 134 porcije čevapa?
6. Funkcija ponude opisuje količinu robe koja se nudi po određenoj cijeni. To je rastuća funkcija oblika $f(x) = ax+b$.

U restoranu iz prethodnog zadatka funkcija dnevne ponude glasi $f(x) = 1.4x + 53$.

- a) Kolika je dnevna ponuda čevapa ako je cijena jedne porcije 35 kn?
b) Uz koju cijenu je ponuda jednaka potražnji?
c) Prikaži grafički funkcije ponude i potražnje za restoran „Tri praščića“. Što zaključuješ?

7. Slastičarnica „Snjeguljica“ ispekla je 100 pita od jabuka. Ukoliko ih dijeli besplatno, razdijelit će, naravno, sve. Ako ih prodaje po cijeni 20 kn po komadu, prodat će pola ispečenih pita.
a) Koja formula opisuje ovisnost broja prodanih pita o cijeni?
b) Kolika bi trebala biti cijena da se proda 80 pita?
c) Koliko pita će prodati ako je cijena jedne 15 kn?



8. (Bonus)

U tvornici odjeće „Igla“ imaju u ponudi 1000 majica po cijeni 50 kn, a potražnja takvih majica je 800. Po cijeni 30 kn nude 800 majica, a potražnja je 1300.

- Odredi funkciju ponude.
- Odredi funkciju potražnje.
- Prikaži ih grafički.
- Odredi sjecište i zaključi što ono predstavlja.

9. (Bonus)

U tvornici čokolade „Mljac-mljac“ izračunali su da njihove dnevne troškove proizvodnje opisuje formula $T(x) = 5x+3000$.

- Koliki je trošak ako dnevno proizvedu 700 čokolada?
- Koliko se čokolada može proizvesti uz trošak 10 000 kn?
- Koliki je prihod od prodaje 700 čokolada dnevno ako je prodajna cijena jedne čokolade 9 kn?
- Izračunaj dobit pa procijeni isplati li se proizvodnja 700 čokolada.
- Koliko najmanje čokolada dnevno treba proizvesti i prodati da bi se proizvodnja isplatila?
- Kolika je dobit ako se proda 2000 čokolada?
- Prikaži grafički funkciju dobiti. Što zaključuješ? Što je nul-točka?

Rješenja zadataka:

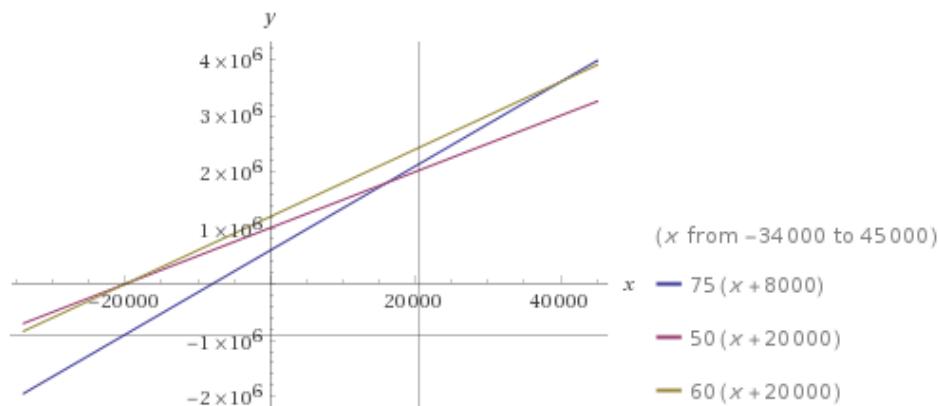
1. a) $T(x) = 300x+2000$, $T(50) = 17000$

Iznajmljivanje sale košta 17000 kn.

b) $35000 = 300x+2000$, $x=110$

Na svadbi može biti najviše 110 osoba.

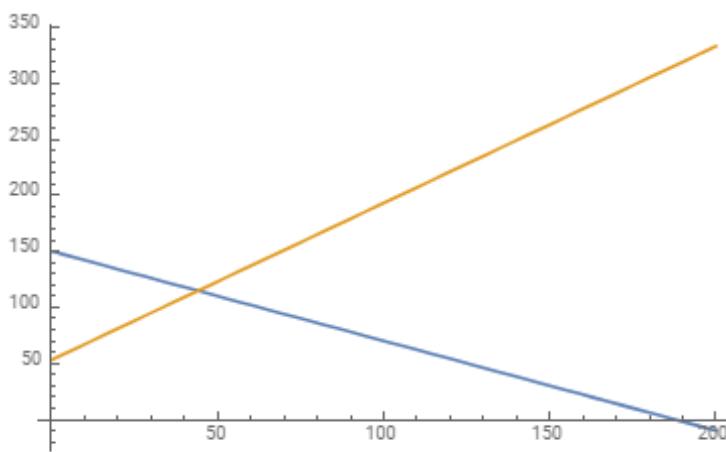
2.



<https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+75x%2B600000,+50x%2B1000000,+60x%2B1200000>

Iz grafičkog prikaza je vidljivo da je za proizvodnju više od 20000 proizvoda najisplativija ideja koju je imala Božica, jer su tada troškovi najmanji.

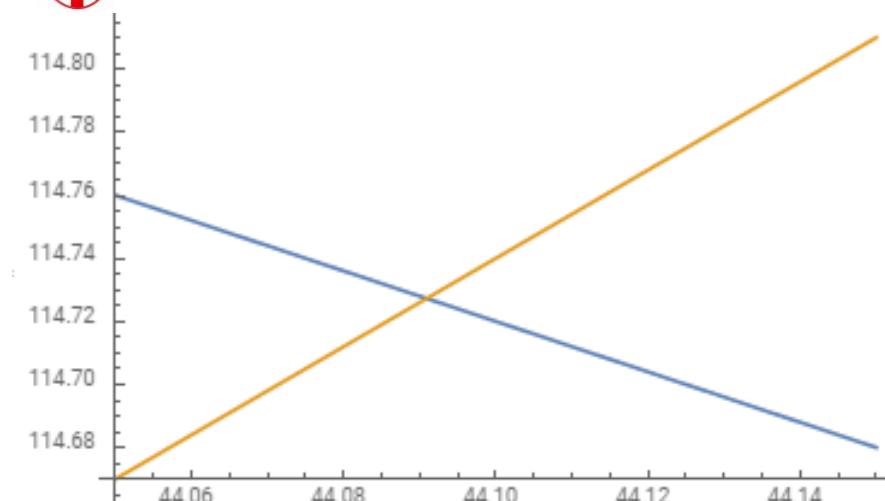
3. a) $P(x) = 150x$, $D(x) = 150x - (30x + 5000) = 120x - 5000$
 b) Proizvodnja se isplati za $D(x) > 0$, tj. $120x - 5000 > 0$, $x > 41.67$
 Treba proizvesti najmanje 42 pidžame.
4. Funkcija je padajuća, jer što je veća cijena, to je manja potražnja.
 a) $400a+b = 50$
 $200a+b = 90$
 $a = -0.2$, $b = 130$, $f(x) = -0.2x+130$
 b) $f(500) = -0.2 \cdot 500 + 130 = 30$ Prodat će 30 pari cipela.
5. a) $f(30) = -0.8 \cdot 30 + 150 = 126$ Prodat će 126 porcija.
 b) $f(40) = 118$ Prodat će 118 porcija.
 c) $134 = -0.8x + 150$, $x=20$ Cijena bi trebala biti 20 kn.
6. a) $f(35) = 1.4 \cdot 35 + 53 = 102$ Uz cijenu od 35 kn po porciji dnevna ponuda čevapa je 102 porcije.
 b) $-0.8x + 150 = 1.4x + 53$, $x = 44.09$ Uz cijenu 44.09 kn je ponuda jednaka potražnji.
 c)



<https://develop.open.wolframcloud.com/env/661a3208-6497-4b3d-a4e8-93e458cbd583#sidebar=compute>

Na grafu se vidi da je ponuda jednaka potražnji za cijenu koju smo izračunali. Vidi se da bi uz cijenu od otprilike 190 kn po porciji nestalo potražnje (vrijednost funkcije potražnje negativna), a kad bi se čevapi dijelili besplatno potražnja bi bila 150 porcija (tako se i interpretira koeficijent b).

Preciznije (promjenom intervala na x-osi može se dobiti preciznija slika):



- $$7. \quad a) \quad 0a+b = 100$$

$$\underline{20a+b = 50}$$

$$a = -2.5, b = 100, f(x) = -2.5x + 100$$

- b) $80 = -2.5x + 100$, $x = 8$ Cijena bi trebala biti 8 kn.

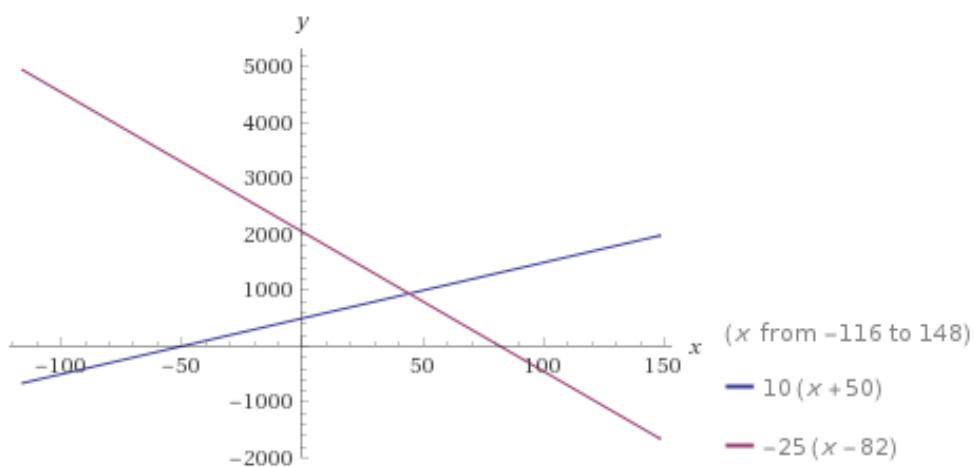
c) $f(14) = -2.5 \cdot 14 + 100 = 65$ Prodat će 65 pita.

8. (Bonus):

- a) Na grafu funkcije ponude nalaze se točke (50, 1000) i (30, 800) pa se uvrštavanjem u $f(x) = ax+b$ dobije sustav jednadžbi čije je rješenje $a= 10$, $b= 500$. Funkcija ponude je $f(x) = 10x+500$.

b) Na grafu funkcije potražnje nalaze se točke (50, 800) i (30, 1300) pa se uvrštavanjem u $f(x) = ax+b$ dobije sustav jednadžbi čije je rješenje $a= - 25$, $b= 2050$. Funkcija potražnje je $f(x) = - 25x+2500$.

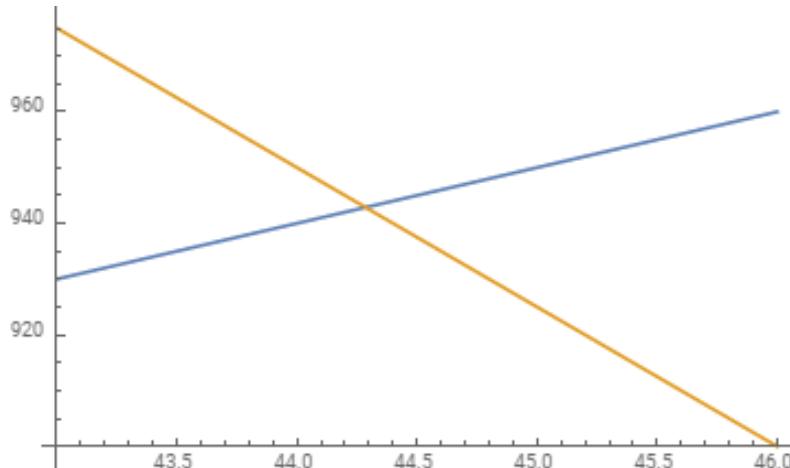
c)



<https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+10x%2B500,+‐25x%2B2050>



d) Sjecište je točka u kojoj je ponuda jednaka potražnji. S grafa vidimo da je za x približno jednak 45, a računski, izjednačavanjem tih dviju funkcija, dobijemo $x = 44.29$. Dakle, ponuda je jednaka potražnji kad je cijena majice 44.29 kn. Količina majica je ordinata sjecišta. S grafa vidimo da je to približno 1000, a računanjem dobijemo 942.86, tj. 943 majice.



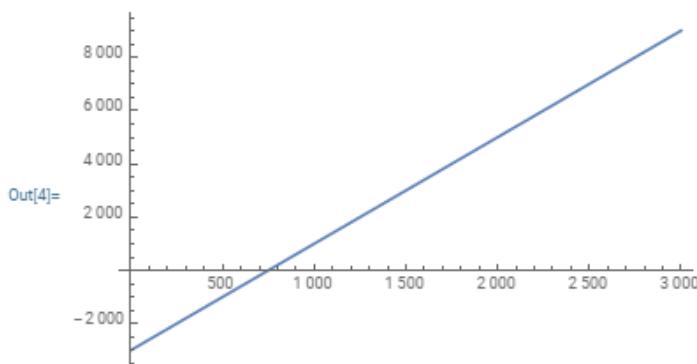
9. (Bonus)

- a) $T(700) = 5 \cdot 700 + 3000 = 6500$ Troškovi su 6500 kn.
b) $10\ 000 = 5x + 3\ 000$, $x = 400$ Može se proizvesti 1400 čokolada.
c) $P(x) = 9x$, $P(700) = 6300$ Prihod je 6300 kn.
d) $D(700) = P(700) - T(700) = 6300 - 6500 = -200$ Ne isplati se, jer su u gubitku.
e) $D(x) = P(x) - T(x) = 9x - (5x + 3000) = 4x - 3000$

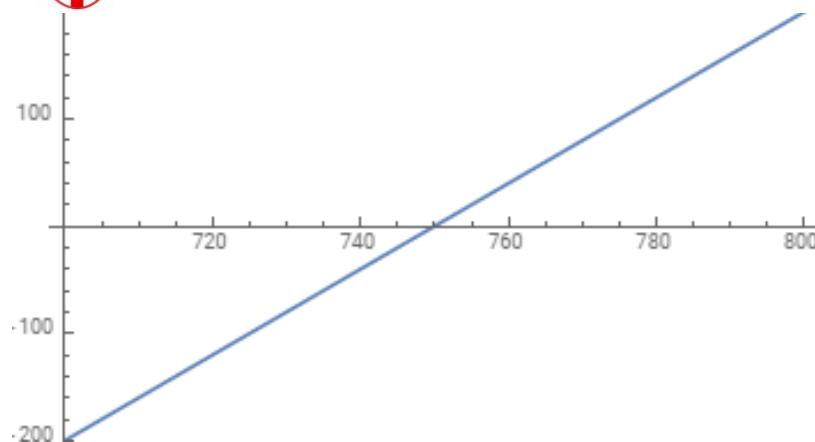
$D(x) > 0$, $x > 750$ Treba proizvesti i prodati više od 750 čokolada.

- f) $D(2000) = 4 \cdot 2000 - 3000 = 5000$ Dobit je 5000 kn.

g)



<https://develop.open.wolframcloud.com/env/1557b0f1-045d-4cfe-b3dd-453c6bec3e29#sidebar=compute>



Promjenom intervala na x-osi može se dobiti preciznija slika s koje se lakše očitava nul-točka.

Zaključuje se da se proizvodnja isplati ako se proizvede više od 750 čokolada. Ako se proizvede manje, tvornica je u gubitku. 750 je nul-točka, tj. tada je dobit 0 kn.

Zadnjih pet minuta sata učenici igraju online igru memorije kao malu relaksaciju i konačno ponavljanje i provjeravanje usvojenosti osnovnih pojmova o linearoj funkciji (<https://matchthememory.com/sanjasruk-linearna>).